UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

DOBLE GRADO EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Pablo Manzano Crespo

MATEMÁTICAS Y CINE

Trabajo de Fin de Grado del doble grado de Matemáticas y Física. Parte de Matemáticas.
Curso 2019 - 2020

Tutora:
Gloria Cabrera Gómez
(Dpto. Análisis Matematico y Matemática Aplicada)

Madrid, 25 de Junio de 2020

Índice

Resumen

Mathematics is present in movies almost since the beginning of the film industry, making this industry a really useful tool for its dissemination. We can find a broad list of examples of mathematics concepts, theorems and propositions explained in movies, covering all mathematical fields and all levels from primary school to advanced mathematics. With scientific rigour, the film industry is also a valid tool for teaching as many professors have already proved. This rigour is highly important since some movies have mathematical mistakes or misconceptions, but, keeping these scientific standards, this tool provides the desired educational results.

1. Introducción

El cine -acortación de cinematógrafo- es la técnica, arte e industria de la cinematografía, que es la captación y proyección sobre una pantalla de imágenes fotográficas en movimiento. Las matemáticas aparecen constantemente en el cine, bien por protagonistas que son matemáticos, escenas con contenidos matemáticos o películas que tienen una clara estructura matemática. Este trabajo pretende exponer la idea del cine como herramienta para la divulgación y docencia de las matemáticas, centrando el estudio principalmente en largometrajes en los que se desarrollan conceptos matemáticos, así como la vida de matemáticos ilustres con sus respectivas aportaciones.

El origen del cine es atribuido a los hermanos Lumière cuando en 1895 proyectaron públicamente por primera vez una serie de fotogramas, aunque ya desde 1890 se empiezan a registrar las primeras patentes de sistemas de proyección de imágenes en movimiento, y la primera película conocida data de 1893 [1]. En cuanto a las primeras referencias matemáticas en el cine, nos podemos remontar a 1919 con la película «El gabinete del doctor Caligari» (Robert Wiene, 1919) en la que más que exponer conceptos matemáticos R. Wiene se ayuda de la geometría para romper la estética y crear decorados exagerados de líneas oblicuas, proporciones deformadas y encuadres inclinados que reflejan las obsesiones y los miedos. Lo mismo ocurre en «Nosferatu» (F.W. Murnau, 1922). Para encontrar referencias matemáticas tenemos que esperar a 1932, cuando en la película-documental «Las Hurdes. Tierra sin pan» (Luis Buñuel, 1932) se incluyen referencias al aprendizaje de las matemáticas en la escuela; y en un largometraje en sí, en la misma década de los años 30: «Sucedió una noche» (Frank Capra, 1934) y «El mago de Oz» (Victor Fleming, 1939) en las que se hacen alusiones matemáticas sencillas en varias escenas.

Surge entonces una pregunta fundamental para la motivación de este trabajo: ¿existen en el cine suficientes referencias matemáticas como para considerarlo una herramienta útil en la docencia y la divulgación? Efectivamente la respuesta es que sí, como demostraremos a lo largo de este trabajo. Además, podemos encontrar una variada bibliografía sobre distintos métodos didácticos que han sido previamente aplicados especialmente en la educación primaria, secundaria y bachillerato por profesores como Alfonso J. Población [3] y José Mª Sorando [4], fundamentales en la documentación de este trabajo. Por poner un ejemplo concreto, la profesora de la Universidad de Valencia Elena Thibaut Tadeo apoya el tema de los números irracionales en el cuarto curso de la E.S.O. con la película «Pi, fé en el caos» (Darren Aronofsky, 1998) [5], de la que más tarde hablaremos. Existen también trabajos de mayor profundidad teórica en el campo de la pedagogía sobre el cine como recurso didáctico en la enseñanza [6], [7], pero no es el objetivo de este trabajo abordarlos pues quedan fuera del campo de las matemáticas.

La siguiente cuestión importante para la fundamentación del trabajo concierne a la forma en que las películas tratan las matemáticas. Como comentamos anteriormente, algunas películas únicamente hacen sencillas alusiones matemáticas en alguna de sus escenas por lo que no tienen interés real para la divulgación. Se expondrán por tanto en este trabajo sólo las películas que aporten valor real en el objetivo propuesto. Son muchos autores los que en este sentido clasifican la aparición de las matemáticas en el cine en distintos bloques: que las matemáticas estén en el núcleo central de la trama, películas cuyo hilo conductor es la vida de un personaje matemático, películas que hacen referencia a cierta teoría -siendo las más frecuentes la Teoría del Caos, Teoría de la Probabilidad o Teoría de Números-, películas de dibujos animados, etc. [1], [8].

Ya que éste es un trabajo centrado en las matemáticas, nuestra clasificación será por ramas matemáticas y será la descripción de cada película y sus conceptos expuestos los que muestren la clasificación de la misma atendiendo al criterio previamente mencionado.

Otro aspecto importante es distinguir las verdaderas matemáticas de otros campos como la numerología y la apofenia -experiencia de ver patrones o conexiones en sucesos aleatorios-. Incluso en ocasiones son las críticas de la prensa las que confunden los límites de las matemáticas y fomentan el desconocimiento generalizado en gran parte de la sociedad de los estudios matemáticos. Son varios los títulos que podemos mencionar en este aspecto como «El número 23» (Joel Schumacher, 2006), en la que el protagonista que interpreta Jim Carrey parece encontrar dicho número en todas partes; la española «El aviso» (Daniel Calpalsoro, 2018) de la que podemos recordar numerosos titulares de la prensa española como *"Las matemáticas no mienten"* [9] o *"¿Pueden las matemáticas ser culpables de asesinato"* [10], mientras que las únicas referencias matemáticas en la película se limitan a una serie de 5 números que el protagonista relaciona con una serie de asesinatos. Sorprende que la anteriormente mencionada «Pi, fe en el caos» incurra en el tema de la numerología, con un protagonista obsesionado con las cifras decimales del número π incluso como forma de hallar a Dios. Todo esto no quiere decir que no puedan utilizarse estas películas para la docencia, sino que el docente debe transmitir la diferencia en estos campos, como bien hace E. Thibaut [5]. Constituyen una buena fuente para mostrar la naturaleza de los estudios matemáticos y sus límites. [11].

Además, que aparezcan matemáticas en una película tampoco garantizan que éstas sean correctas. Algunos de los errores más frecuentes son el confundir los términos de posibilidad y probabilidad, errores garrafales en cálculos, y uno curioso y repetido: el representar el número π con varias cifras decimales erróneas. Llama la atención que este último lo encontramos en películas como «Pi, fe en el caos» y «Donald en el País de las Matemáticas» (Hamilton Luske, 1959), que tienen las matemáticas como trama central de la película. Como curiosidad, mayor cuidado tuvieron en la serie de televisión «Los Simpsons» (Matt Groening, 1989 - actualidad) en la que los guionistas llegaron a hacer una consulta a científicos de la NASA para calcular la cifra decimal en la posición 40.000, ya que el personaje Apu afirma conocer de memoria todas las cifras hasta esta posición, asegurando que la última es un 1. Efectivamente este dato es correcto. Y es que el número π es bastante recurrido en el cine al mencionar las matemáticas [12]. Tampoco es necesario hacer referencias matemáticas explícitas para incurrir en incongruencias, como es el caso de todas las películas con seres anormalmente grandes o pequeños: «Alicia en el país de las Maravillas» en sus dos versiones (Clyde Geronimi, Wilfred Jackson Hamilton Luske, 1951; Tim Burton, 2010), «La mosca» en sus tres versiones (Kurt Neumann, 1958; David Cronenberg, 1986; Chris Wales, 1989), «King Kong» (Peter Jackson, 2005) también con dos versiones anteriores, «Cariño, he encogido a los niños» (Joe Johnston, 1989) y sus secuelas, etc. Todos estos seres son "geométricamente imposibles"de acuerdo a la Ley cuadrado - cúbica, enunciada por primera vez por Galileo Galilei en 1638 del siguiente modo:

Ley cuadrado - cúbica. Cuando un objeto crece sin cambiar de forma, su superficie aumenta como el cuadrado de una longitud característica del mismo (por ejemplo, su altura), en tanto que su volumen se incrementa como el cubo de dicha longitud.

Por tanto, biológicamente no podría existir ninguno de estos seres, ya que los aumentados en tamaño quebrarían sus huesos al tener que soportar una masa un orden de magnitud mayor, mientras que los de un tamaño disminuido tendrían mayor superficie corporal en relación a la masa siendo incapaces de mantener el calor corporal [13].

En la próxima sección analizaremos algunos conceptos matemáticos dentro del contexto de cada película. Éstos no son todos los que podemos encontrar en el cine y, de hecho, es una pequeña selección dentro del listado completo. Han sido seleccionados atendiendo a dos criterios: que sean conceptos estudiados en el grado de matemáticas -o directamente relacionados con ellos- y que la película describa o demuestre dicho concepto con criterio científico-matemático. Posteriormente, en la sección 3 trataremos películas biográficas de matemáticos ilustres. El motivo de separar ambas secciones es que las películas de ésta última no siempre explican las aportaciones de los respectivos matemáticos con el mismo criterio que exigimos a las de la sección 2. Aun así no queríamos dejar de mencionarlas por su valor divulgativo.

2. Ramas Matemáticas

2.1. Geometría

La Geometría es una de las ciencias más antiguas y es inabarcable en su totalidad en un trabajo de esta índole. Un buen punto de partida son los Elementos de Euclides: trece libros escritos en torno al año 300 a.C. que inauguran el método axiomático sobre el que se basan las matemáticas y otras ciencias [14]. Euclides recoge en él gran parte de las matemáticas griegas, y sienta las bases de la Geometría Euclídea. Los seis primeros libros tratan la geometría del plano, para lo cual Euclides desarrolla proposiciones a partir de definiciones y axiomas (postulados y nociones), y es por ello por lo que muchos historiadores datan aquí -junto con Eudoxo de Cnido y su lema de exhausción- el comienzo de las matemáticas tal y como las entendemos hoy en día. Son varias la películas que citan este tratado, como «Lincoln» (Steven Spielberg, 2012) y «Ágora» (Alejandro Amenábar, 2008) en las que el personaje principal emplea el primer axioma, "cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí", para fundamentar su argumento sobre la igualdad religiosa o de razas; o como «Smila, misterio en la nieve» en la que la protagonista, una científica amante de las matemáticas, narra los postulados de Euclides a otro de los protagonistas. Sin embargo en estas películas únicamente se cita dicho contenido como adorno de la trama, sin mencionar la fundamental relevancia de lo antes comentado: la instauración del método aximático como pilar de las matemáticas [14] [15].

Siguiendo con los Elementos de Euclides, en «El hombre sin rostro» (Mel Gibson, 1993) el profesor Mcleod, interpretado por el propio Mel Gibson, enuncia la proposición 47 de los Elementos por el cual se halla el centro de una circunferencia de la siguiente manera:

"*Traza un círculo A, B, C. Traza una línea recta entre A y B. Ahora bisecciona AB en D y traza una línea recta DC que forme ángulos rectos con AB. Ahora traza otra línea recta AC. Bisecciona AC... y ya tienes el centro del círculo.*"

Figura 1: Fotograma de la película «El hombre sin rostro» en la que el porfesor McLeod enuncia el postulado 47 de los Elementos de Euclides

En general podemos encontrar numerosas referencias a la Geometría de la Edad Antigua en el cine. Un tema muy recurrente es el Teorema de Pitágoras que aparece en películas como «El mago de Oz» (Victor Fleming, 1939), «Loco por el circo» (Michael Kidd, 1958) y «La clase» (Laurent Cantet, 2008); aunque en ninguna de ellas se hace mención a alguna de todas las demostraciones existentes -una de tantas está recogida en los mencionados Elementos de Euclides- [16]. La película española «Leyenda de fuego» (Roberto Lázaro, 2001) explica el concepto del número aureo y cómo hallarlo geométricamente. En «Ágora» (Alejandro Amenábar, 2008) la protagonista Hypatia presenta de manera muy didáctica las carcacterísticas de la elipse: [1]

"¿Qué sabemos del círculo? Sabemos que su centro equidista de cualquier punto de su perímetro. Sí, pero... ¿Y si divido ese centro en dos y lo que mantengo constante es la suma de sus distancias al perímetro? Te lo demostraré. Mientras muevo esta vara por la cuerda, un segmento aumenta y el otro disminuye. Y viceversa. Por tanto la suma de ambos será constante. ¿Lo ves? ¿Y si aplicamos esto al movimiento de la Tierra? ¿Qué...figura... obtendremos? ¡Una elipse! Una elipse con el sol en uno de sus focos. Porque, ¿qué es el círculo sino una elipse muy especial cuyos focos están tan próximos que parecen uno solo?"

Figura 2: Fotograma de la película «Ágora» en la que Hypatia esboza una elipse a partir de los focos y las cuerdas.

El siguiente gran avance de la Geometría se debe a René Descartes (1596 - 1650), quien en su obra "La Géométrie" introduce la Geometría Analítica con sus ordenadas analíticas y la reducción del problema geométrico a ecuaciones algebraicas. Pese a que Pierre de Fermat (1601 - 1665) ya había usado el concepto de las coordenadas cartesianas y que Descartes tampoco desarrolló esta nueva rama de la Geometría, se sigue atribuyendo a él el origen de la misma. Es un avance de gran importancia, ya que la Geometría Analítica es la base de otras ramas de la Geometría a la orden del día en la investigación matemática como son la Geometría Lineal y Afín, la Geometría Diferencial o la Geometría Algebraica [2] [14]. Un problema clásico de Geometría Analítica lo encontramos en «Muerte de un ciclista» (Juan Antonio Bardem, 1955), curiosamente rodada en la Facultad de Físicas de la U.C.M. -por aquel entonces edificio de Física y Matemáticas- [2]. En una de las escenas vemos cómo una alumna de matemáticas desarrolla un ejercicio de curvas mecánicas y sus envolventes. Observamos en la pizarra del aula las ecuaciones paramétricas de la cicloide y las gráficas de ésta, de la epicicloide y el astroide (evoluta de una elipse, como lo es la cicloide a la circunferencia), mientras la alumna explica:

"[...] queda sólo por demostrar que el contorno aparente del toro es igual a la envolvente de las circunferencias. Si suponemos que el centro de la circunferencia describe una elipse de semiejes m y n, las ecuaciones paramétricas de esta elipse serán: $a = m\cos\alpha$ *;* $b = n\sin\alpha$ *. Para obtener la envolvente de esta familia de circunferencias, habrá que derivar* $2(xa)(m\sin\alpha)+2(yb)(m\cos\alpha) = 0$*, y eliminando* α *entre estas ecuaciones, resulta la ecuación (1) de la envolvente de las circunferencias, cuyos centros describen la elipse (2), cuya proyección ortogonal sobre el plano z = 0 de la circunferencia base de la superficie canal. Es decir la toroide, con lo que queda demostrado. Por tanto el toro es la única superficie [...]"*

Veamos que efectivamente la alumna llevaba razón, [17]:

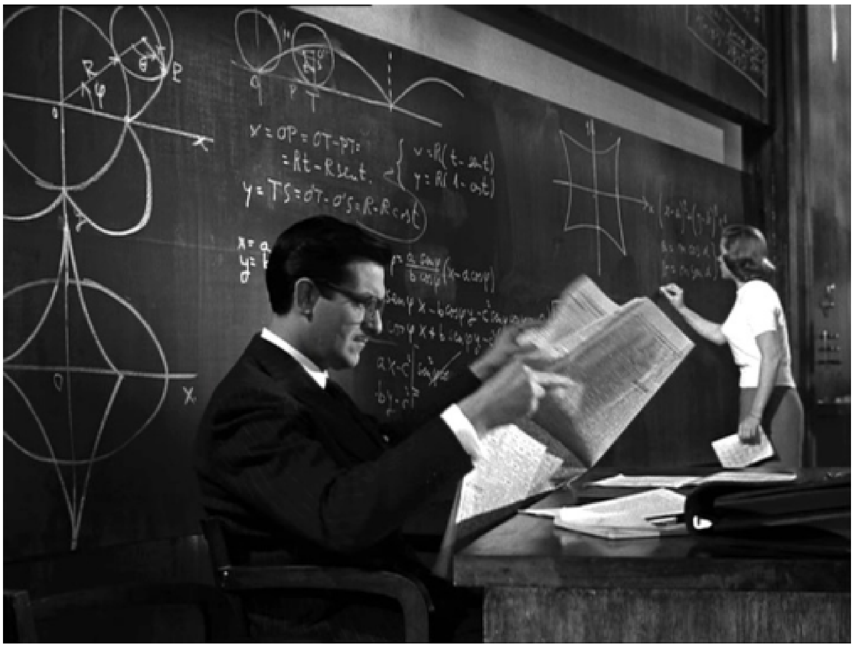


Figura 3: Fotograma de la película «Muerte de un ciclista» en el que observamos las ecuaciones paramétricas de la cicloide y las gráficas de ésta y de la epicicloide.

Demostración. Las ecuaciones paramétricas de cualquier evoluta vienen dadas por:

$$\begin{cases} \alpha = x - \dfrac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'} \\ \beta = y + \dfrac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'} \end{cases}$$

E introduciendo la ecuación de la elipse obtenemos:

$$\begin{cases} \alpha = \left(a - \dfrac{b^2}{a}\right) \cos^3 t \\ \beta = \left(b - \dfrac{a^2}{b}\right) \sin^3 t \end{cases}$$

Eliminando el parámetro t obteniendo así la ecuación del astroide:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Por último, dada una circunferencia de radio r_1 y una familia de circunferencias de radio r_2 con $r_2 < r_1$ y sus centros sobre la circunferencias mayor, tenemos que su envolvente son dos circunferencias de radio $r_1 + r_2$ y $r_1 - r_2$. Proyectando todo ello sobre un plano obtenemos la superficie toroidal mencionada. □

Tampoco es fácil encontrar muchas más referencias explícitas a la Geometría avanzada dentro del cine, así como sí lo es en otras ramas de las matemáticas como puede ser la Física Matemática, la Teoría de Juegos o la Lógica Matemática. Por último, merece mención otra de las ramas de la Geometría estudiada en el grado de Matemáticas: la Geometría Proyectiva, que a diferencia de la Analítica olvida el concepto de medida para estudiar la perspectiva. El protagonista de «Una pura formalidad» (Guiseppe Tornatore, 1994) explica en uno de sus diálogos el concepto de punto del infinito [2]:

"Dos rectas paralelas jamás se unen. Sin embargo es posible imaginar la existencia de un punto tan lejano en el espacio, tan lejano, en el infinito, que pudiésemos creer y admitir que las dos rectas se unen en él. Así es. Llamaremos a ese punto, punto impropio"

2.2. Álgebra

Manteniendo el enfoque histórico, debemos citar en esta sección a Al-Guarizmi (ca. 780 - ca. 850), matemático de la Casa de la Sabiduría árabe considerado el padre del Álgebra por su obra "Álgebra et Mucabala" (reintegración y comparación) en la que recoge la tradición babilónica del estudio de ecuaciones con la idea griega de la demostración matemática y con una notación sincopada como novedad. Llevan su nombre las palabras guarismo (signo gráfico que expresa un número) y algoritmo [14]. El Álgebra conocido por aquel entonces es lo que hoy en día conocemos por Álgebra Elemental. Existen incontables escenas en el cine con alusiones al Álgebra Elemental, típicamente un alumno resolviendo un problema -o un profesor explicándolo- en una clase de matemáticas de instituto. Pero estas alusiones suelen ser bastante pobres y en algunos casos hasta incorrectas [13].

Es por ello por lo que vamos a centrar esta sección en el Álgebra Abstracta, el estudio de las estructuras algebraicas. Veremos tres ejemplos:

- La permutaciones dentro de la Teoría Elemental de Grupos.
- Algebra Homológica y Teoría de Categorías.
- El Lema de la Serpiente.

Teoría Elemental de Grupos

Un **grupo** es un par $(X, *)$ donde X es un conjunto no vacío y $*$ una operación interna sobre X que cumple la propiedad asociativa, además debe existir un elemento neutro y para cada elemento de X un elemento opuesto. Si $*$ cumple la propiedad conmutativa entonces el grupo es abeliano.

Consideramos ahora el conjunto S_X de biyecciones de X:

$$S_X = \{f : X \longrightarrow X, f \text{ es una aplicación biyectiva}\}$$

El conjunto S_X junto con la composición de funciones, $(S_X, \circ)$, forma el **grupo de permutaciones** de X, pues efectivamente existe un elemento neutro que es la identidad, y al ser f biyectiva la función inversa f^{-1} es el elemento opuesto de f. Toda permutación se puede escribir de manera única como producto de **ciclos**, siendo éstos las permutaciones denotadas por $(i_1\ i_2\ ...\ i_r)$ que manda i_1 a i_2, i_2 a i_3, ..., i_{r-1} a i_r, y i_r a i_1, dejando fijos el resto de elementos del conjunto [18].

Estos conceptos son lo primero que podemos encontrar en cualquier libro de Teoría Elemental de Grupos, y están presentes en la película «Cube» (Vincenzo Natali, 1997). En ella, seis desconocidos despiertan en unas habitaciones con forma cúbica conectadas entre sí y tratarán de salir resolviendo problemas matemáticos y de lógica. Resulta que las habitaciones están cifradas con unos números que indican sus coordenadas cartesianas dentro de la gran estructura, también con forma de cubo, y además cada cierto tiempo se mueven según una ley cíclica. Deducen así que comparando los números de varias salas adyacentes pueden averiguar en qué fase de la permutación están y sólo quedaría conocer la ley que rige dicha permutación, es decir, los distintos ciclos cuyo producto la componen. En la película no llegan a descifrar esta ley, que sí está explicada por el matemático asesor de la película, el profesor de la Universidad de East Carolina David W. Pravica [19].

Álgebra Homológica y Teoría de Categorías

La protagonista de «Antonia» (Marleen Gorris, 1995) es una profesora de universidad que en una de las escenas imparte una clase sobre Álgebra Homológica. Esta rama del álgebra nació a mediados del siglo XX a partir de la Teoría de Módulos y la Teoría de Categorías, considerando especialmente los funtores. Veamos estos conceptos fundamentales:

Definición. Módulo sobre un anillo R. Sea R un anillo, un grupo abeliano M se llama **R-módulo** si tiene definida una operación $(r, x) \longmapsto rx \in M$ de forma que, para todo $r, s \in R$ y $x, y \in M$ se cumple:

1. $r(x + y) = rx + ry$
2. $(r + s)x = rx + sx$
3. $(rs)x = r(sx)$

Definición. Categoría. Una **categoría**, $\mathcal{C}$, consiste en:

1. Una clase $ob(\mathcal{C})$ de objetos (que podemos denotar A, B, C, etc.).
2. Para cada par ordenado (A, B), un conjunto, $hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, de morfismos con dominio A y codominio B.
3. Para cada trío de objetos (A, B, C), una aplicación $(f, g) \longmapsto gf$ del conjunto producto $hom(A, B) \times hom(B, C)$ en $hom(A, C)$

Que satisfacen las condiciones:

- Si $(A, B) \neq (C, D)$ entonces $hom(A, B)$ y $hom(C, D)$ deben ser disjuntos.
- Si $f \in hom(A, B)$, $d \in hom(B, C)$, $h \in hom(C, D)$; entonces $(hg)f = h(gf)$. (Condición de asociatividad).
- Para cada objeto A existe un único elemento unidad $1_A \in hom(A, A)$ tal que $f1_A = f$ para todo $f \in hom(A, B)$, y $1_A g = g$ para todo $g \in hom(B, A)$. (Existencia de unidad).

A partir de estos conceptos y otros conceptos derivados, se desarrolla el álgebra homológica, empezando por las nociones de **complejo** y **homomorfismo entre complejos**. Estas definiciones, que no desarrollaremos para no extender demasiado la redacción, se pueden encontrar en cualquier tratado de Álgebra Homológica [21]. La clase que vemos en «Antonia» versa sobre el factor algebraico de conjuntos.

Lema de la serpiente

Este lema, perteneciente al Álgebra Homológica, se estudia en cursos de matemáticas avanzadas, y para exponerlo y entenderlo necesitamos conocer varios conceptos del álgebra como la Teoría de Anillos, los módulos, los homomorfismos, etc. Como no es el objetivo de este trabajo centrarse en un sólo resultado, vamos a suponer estos conceptos por conocidos y enunciaremos el lema así como la idea de la demostración que aparece en la película «Ahora me toca a mí» (Claudia Weil, 1980).

Enunciado

Sea R un anillo conmutativo y consideremos los R-módulos A_1, A_2, A_3 y B_1, B_2, B_3 tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "\mu'"] & B_2 \arrow[r, "\epsilon'"] & B_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Entonces, existe un homomorfismo de R-módulos $\delta : Ker\ f_3 \longrightarrow Coker\ f_1$, llamado **homomorfismo de conexión** tales que, para las aplicaciones inducidas, la siguiente sucesión es exacta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\ f_1 \arrow[r, "\bar{\mu}"] & \mathrm{Ker}\ f_2 \arrow[r, "\bar{\varepsilon}"] & \mathrm{Ker}\ f_3 \arrow[dll, rounded corners, "\delta"] & \\
& \mathrm{Coker}\ f_1 \arrow[r, "\bar{\mu}'"] & \mathrm{Coker}\ f_2 \arrow[r, "\bar{\varepsilon}'"] & \mathrm{Coker}\ f_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Una sucesión de morfismos de R-módulos es **exacta** si la imagen de cada morfismo es igual al núcleo del morfismo consecutivo. La demostración completa y exhaustiva de este lema es bastante extensa y la podemos encontrar en las notas del investigador postdoctoral del ICMAT Ángel González - Prieto [20]. En la película mencionada, de nuevo la protagonista es una profesora de universidad, y en una de sus clase comenta la demostración del teorema:

*[...] Considerando que tenemos un elemento **del núcleo** de f_3, es decir, un elemento en A_3 tal que f_3 lo conduce a cero en B_3. Se vuelve a A_2 mediante el **mapa** ϵ, que es **sobreyectiva** [...] hasta un elemento de la imagen de μ, ¿de acuerdo? Entonces volvemos a un A_2 fijo. Tomando f_2 de A_2 llegamos a cero en B_3 por la conmutatividad del diagrama. Está por tanto en el **núcleo del mapa** ϵ', y por tanto en la **imagen del mapa** μ', por la exactitud de la cadena inferior [...] luego podemos retroceder a un elemento de B_1 y vemos que resulta ser un **módulo** bien definido de la imagen de f_1. Por lo tanto define un elemento en el **co-kernel** de f_1. Ésta es la **serpiente**.*

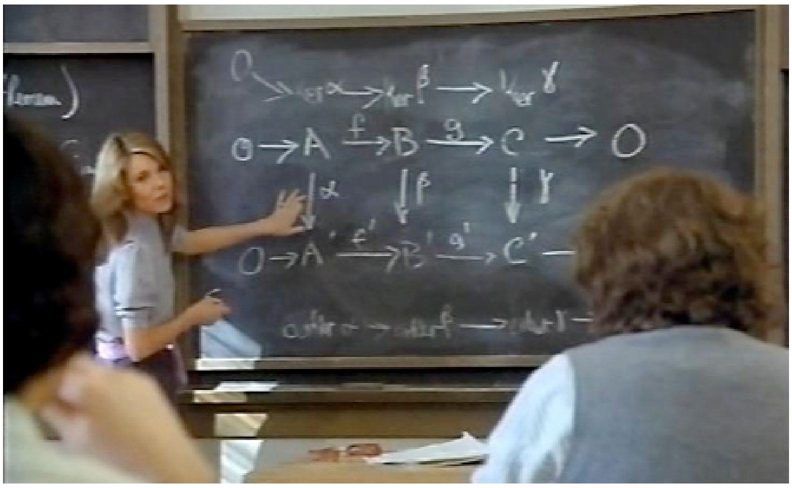


Figura 4: Fotograma de la película «Ahora me toca a mí» en la que podemos observar el diagrama del Lema de la Serpiente.

Podemos observar varias palabras de la explicación destacadas en negrita. Se deben a malos doblajes de la versión original en inglés, la cual sí expresa los términos matemáticos correctos. No es la única película -y no son pocas- cuyo doblaje al castellano conduce a errores matemáticos que no aparecen en la versión original, como es el caso de la definición del número π en la película «Cortina rasgada» (Alfred Hitchcock, 1966), unos cálculos mentales de un protagonista de «21, Blackjack» (Robert Luketic, 2008) o varios capítulos de las series «Numbers» y «Los Simpsons» [4].

Resulta anecdótico que el profesor Charles A. Weibel, de la Universidad de Rutgers, cita esta película en su libro "An Introduction to Homological Algebra" (ed. Cambridge University Press, 1994): *"No se incluye la demostración del lema de la serpiente porque lo mejor es visualizarla. De hecho, una prueba bastante clara es la mostrada por Jill Clayburgh en la película «Ahora me toca a mí»"* [2].

2.3. Análisis Matemático

Típicamente los primeros cursos que se estudian sobre el Análisis Matemático son los de Cálculo Diferencial y Cálculo Integral. Los fundamentos de éstos son conocidos por cualquier alumno preuniversitario de la rama de ciencias, y numerosas escenas del cine muestran sencillos problemas concernientes a ellos. Es el caso de «Academia Rushmore» (Wes Anderson, 1998), cuya primera escena discurre en una clase de matemáticas en la que un alumno pregunta por un problema escrito en la pizarra, a lo que el profesor contesta: "*No os preocupéis por él [...]. Es probablemente la ecuación más difícil del mundo [...]. Si alguno de vosotros soluciona el problema, me encargaré personalmente de que no vuelva a abrir un libro de matemáticas el resto de su vida*".

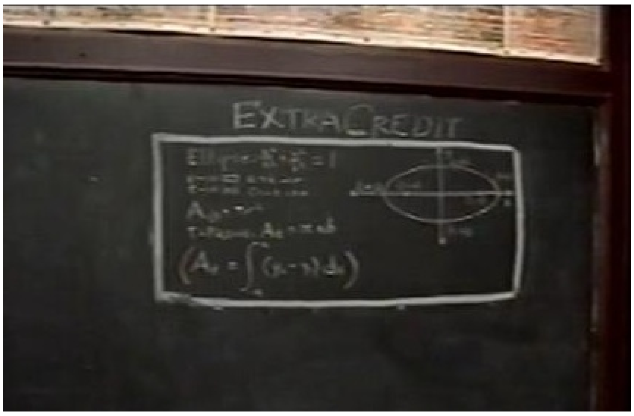


Figura 5: Fotograma de la película «Academia Rushmore» con el problema del cálculo del área de una elipse.

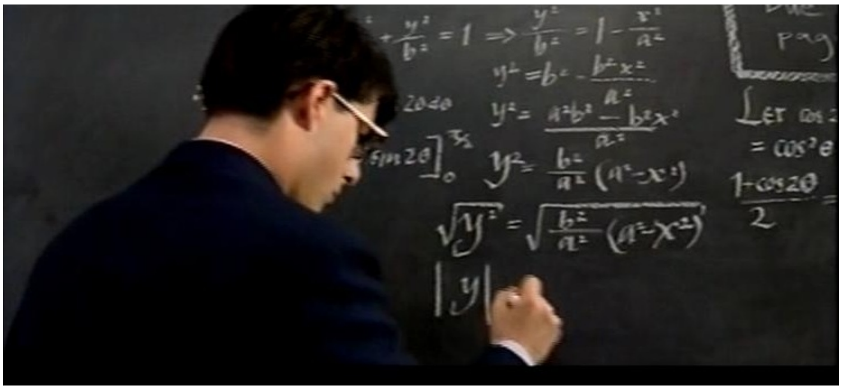


Figura 6: Protagonista de «Academia Rushmore» resolviendo el citado problema.

Si observamos el fotograma de la figura 5 vemos que el problema en cuestión consiste en calcular el área encerrada por la elipse de semiejes a y b, un problema bastante sencillo del Cálculo Integral que resuelve el alumno sin mayor dificultad (figura 6). Resulta que toda la escena es un sueño del protagonista, que realmente es un pésimo alumno en matemáticas y fantaseaba con ”*no volver a abrir un libro de matemáticas el resto de su vida*”. No es la única película en la que se sobredimensiona la dificultad de un problema matemático, como veremos más adelante en esta misma sección en «El indomable Will Hunting» (Gus Can Sant, 1997). Veamos los cálculos que reproduce el alumno:

Toma la ecuación de la elipse de semiejes a y b: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, y despeja:

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)}$$

Y simplifica considerando los dos signos, positivo y negativo, para obtener la integral:

$$A_E = \int \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} - \left[\frac{-b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right] dx = \frac{2b}{a}\int \sqrt{a^2 - a^2 sen^2\theta}\ a\ cos\theta\ d\theta$$

Donde ha introducido el cambio de variable $x = a\ sen\theta$. Por último, aplicando la fórmula del ángulo doble, $cos^2\theta = (1 + cos2\theta)/2$, y calculando los límites de integración llega a la integral:

$$A_E = 4ab\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2\theta\ d\theta = \pi ab$$

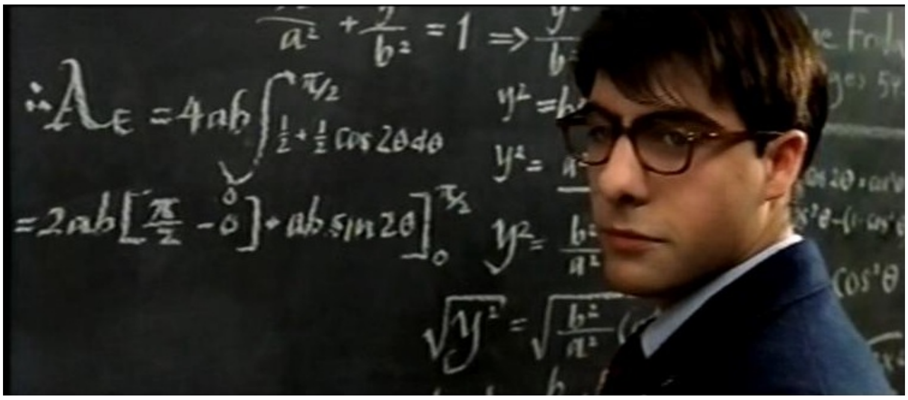


Figura 7: Protagonista de «Academia Rushmore» resolviendo el citado problema.

Encontramos un ejercicio similar en la película «Un don excepcional» (Marc Webb, 2017), que narra la historia de un niña de 7 años con altas capacidades matemáticas. Tal es su nivel, que ingresa en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (M.I.T.) tras pasar un examen de nivel en el que le piden resolver la Integral de Gauss. Además, para comprobar sus conocimientos, el profesor encargado de realizar las pruebas enuncia mal el problema, como podemos ver en la figura 8 arriba.

Tras corregir el enunciado (figura 8 abajo), indicando el signo negativo dentro de la exponencial y el valor absoluto en el parámetro sigma del resultado, procede a resolverlo. Esta integral se resuelve, como bien indica el enunciado, de la siguiente manera:

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \quad ; \quad G^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\ dx\ dy$$

por el Teorema de Fubini. Introduciendo el cambio a coordenadas polares:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\ dx^{o}dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r\cdot e^{-r^2}\ dr\ d\theta = 2\pi\int_0^{\infty} r\cdot e^{-r^2}\ dr = 2\pi\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{\infty} = \pi$$

Por último:

$$G^2=\pi\ ;\ G=\sqrt{\pi}\quad ;\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{c^2}}\ dx = |c|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\ dy\ \ (\text{cambio var. } x=cy)$$

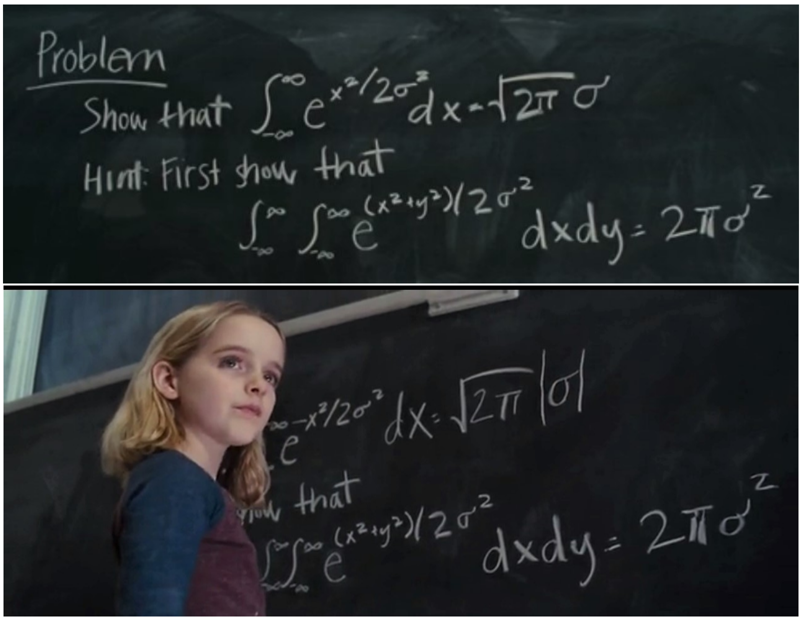


Figura 8: Integral de Gauss resuelta en «Un don excepcional». Arriba: enunciado erróneo. Abajo: corrección del enunciado por la joven protagonista.

En «Un don excepcional» encontramos definidos los Problemas del Milenio, ya que la madre de la protagonista trabajaba en uno de ellos antes de fallecer, y se convierte en el deseo de la hija el acabar su trabajo. Éstos son siete problemas establecidos por el Instituto Clay de Matemáticas en el año 2000, por cuya resolución se otorga un premio de un millón de dólares. Dichos problemas son: P vs NP, Conjetura de Hodge, Conjetura de Poincaré, Hipótesis de Riemann, Existencia de Yang-Mills y Salto de Masa, Ecuaciones de Navier-Stokes, y la Conjetura de Banach y Swinnerton-Dyer. A día de hoy, tan sólo la Conjetura de Poincaré (ya Teorema de Poincaré) está resuelto. Fue el matemático ruso Grigori Perelman quien completó su demostración en el año 2003.

Otro ejemplo del Cálculo Integral y uno de sus resultados fundamentales lo encontramos en la película española «Mi general» (Jaime de Armiñan, 1987), en la que a varios capitanes del ejército español se les encarga dar cursos sobre técnica espacial para la modernización del ejército. En una de las clases encontramos el siguiente diálogo:

El llamado sendero intergaláctico o de Tomacak se resume de la siguiente forma: integral circular de A diferencial de l igual a integral de superficie rotacional A diferencial de S, cuyo índice es 10 elevado a [...]

El reactor Tokamak (no Tomacak como pronuncia el protagonista) es un dispositivo candidato a la obtención de la energía de fusión termonuclear, un tema de la física más que de las matemáticas. Lo interesante es que encontramos un ejemplo del conocido **Teorema de Stokes** [22]:

Teorema de Stokes. Sea S una superficie paramétrica simple con borde ∂S, parametrizada por $\phi : D \longmapsto S$, donde D es la región interior a una curva cerrada simple C regular a trozos en $\mathbb{R}^2$ orientada positivamente, y $\partial S = \phi(C)$ se supone orientada en el sentido que resulte de componer C con ϕ. Sea F un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un entorno abierto de S en $\mathbb{R}^3$, y con valores en $\mathbb{R}^3$. Entonces se tiene que:

$$\int_S rot\ F \cdot \mathbf{N} = \int_{\partial S} F$$

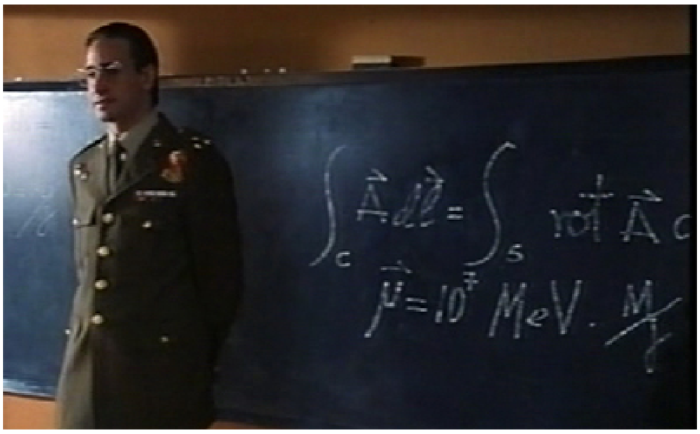


Figura 9: Escena de «Mi general» en la que observamos un ejemplo del Teorema de Stokes

Un cuarto ejemplo de un problema de Cálculo Integral lo encontramos en «Clandestino y Caballero» (Fritz Lang, 1946). El protagonista de esta película es un físico nuclear al que le encargan convencer a un colega de que cese su trabajo para los nazis. En una parte de la película se oculta dentro de un carrusel de feria, y se dedica a calcular la distancia que recorre cada caballito mediante la fórmula de cálculo de la longitud de arco de una curva: dada la curva $f(x)$, su longitud de arco viene dada por $\int \sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx$. Su desarollo es el siguiente:

En primer lugar escribe la función de la curva senoidal y su derivada:

$$y = a\ sen \frac{4x}{r} \quad ; \quad dy = \frac{4a}{r} cos \frac{4x}{r} dx$$

Escribe la integral con la fórmula mencionada y realiza el cambio de variable $\omega = \frac{4x}{r}$:

$$S = \int_0^{2\pi r} \sqrt{1 + \left(\frac{4a}{r}\right)^2 cos^2 \frac{4x}{r}}\ dx = \frac{r}{4} \int_0^{8\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{4a}{r}\right)^2 cos^2 \omega}\ d\omega$$

Posteriormente hace un nuevo cambio de variable y su desarrollo en serie de Taylor en $a = 0$ (serie de Maclaurin):

$$z = \left(\frac{4a}{r}\right)^2 cos^2 \omega \quad ; \quad \sqrt{1+z} = 1 + \frac{1}{2} z - \frac{1}{8} z^2 + ...$$

Por lo que la integral se transforma en:

$$S = \frac{r}{4}\left[8\pi + \frac{1}{2}\int_0^{8\pi}\left(\frac{4a}{r}\right)^2 cos^2\omega\ d\omega - \frac{1}{8}\int_0^{8\pi}\left(\frac{4a}{r}\right)^4 cos^4\omega\ d\omega + ...\right]$$

Como indica el protagonista, se llega al resultado resolviendo "*la integral de una onda senoidal*".

Esto nos lleva directamente a una rama fundamental del Análisis, estudiada tanto en matemáticas como en física e ingenierías por su gran utilidad en distintos campos. Es el **Análisis de Fourier**, bautizada así por el matemático francés Jean-Baptiste Joseph Fourier que inició su desarrollo en su obra "Teoría Analítica del Calor" (1822) en la que estudiaba la ecuación del calor mediante series infinitas de funciones trigonométricas. Encontramos resultados elementales del Análisis de Fourier en la película «El indomable Will Hunting» (Gus Van Sant, 1997), sin duda una de las películas por antonomasia al hablar de matemática y cine.

La primera escena de la película discurre en una clase universitaria en la que el profesor Lambeau explica el Teorema de Parseval:

Teorema de Parseval. Sea $f(x)$ una función de periodo 2π integrable (en sentido de Riemann), cuya serie de Fourier viene dada por $f(x) = \sum c_i u_i(x)$, entonces:

$$\sum |c_i|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\ dx$$

En la pizarra (figura 10) se observa parte de la demostración de este teorema junto con otros resultados de esta teoría, como el siguiente teorema:

Teorema. Sea $\{u_n(x)\}$ un conjunto ortonormal en $[a, b]$ y $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x)$ la serie parcial finita de f. Sea $s'_n = \sum_{i=1}^{n} d_i u_i(x)$ para ciertos coeficientes d_i. Entonces:

$$\int_a^b |f - s_n|^2\ dx\ \leq \int_a^b |f - s'_n|^2\ dx$$

Además, se da la igualdad si y sólo si $d_i = c_i$ para todo i.

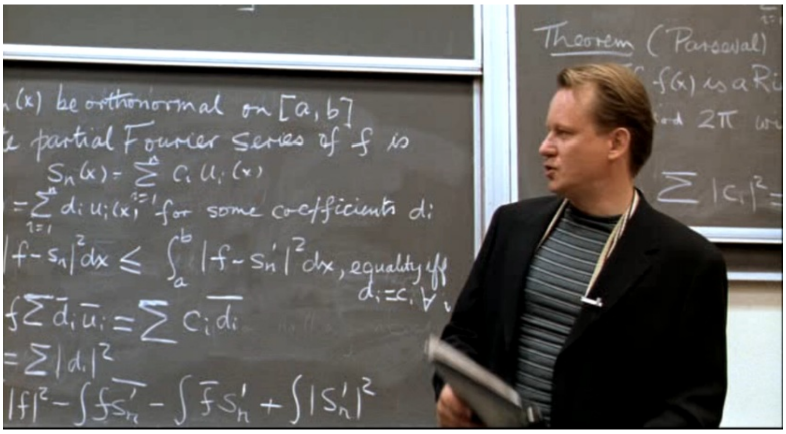


Figura 10: Fotograma de «El indomable Will Hunting» en el que observamos varios resultados sobre el Análisis de Fourier.

A continuación el profesor Lambeau plantea a los alumnos lo que dice ser un difícil problema de "*sistemas avanzados de Fourier*". Si observamos la pizarra con el enunciado (figura 11 en la sección 2.4) resulta ser un sencillo problema de Teoría de Grafos. De nuevo, al igual que en «Academia Rushmore», el cine sobredimensionando la dificultad de algunos problemas matemáticos. Veremos este problema en la sección 2.4.

2.4. Matemática aplicada

El campo de la Matemática Aplicada es posiblemente el de más amplia aplicación dentro de las matemáticas, cubriendo problemas de todas las ciencias básicas y aplicadas así como las ingenierías. De nuevo, como no es posible cubrir todas sus aplicaciones, veremos dos de las más notables como son el Análisis Numérico y la Optimización. Otras ramas dentro de este campo son las Ecuaciones Diferenciales y en Derivadas Parciales, la Investigación Operativa, Mecánica de Fluidos y Sistemas Dinámicos, Matemática Discreta, Estadística Inferencial, etc.

El Análisis Numérico tiene como objetivo aproximar soluciones de problemas de Análisis como las Ecuaciones Diferenciales y en Derivadas Parciales mediante el desarrollo de algoritmos, así como la optimización de los mismos. Encontramos algunas nociones de esta rama en «Figuras ocultas» (Theodore Melfi, 2016), una película basada en hechos reales que relata el fundamental trabajo de tres mujeres afroamericanas en la carrera espacial de Estados Unidos.

Una de las protagonistas es escogida por sus conocimientos de Geometría Analítica para el grupo de calculistas de la primera misión espacial tripulada. Al entrar en dicho grupo vemos cómo le someten a pruebas relacionadas con el Triedro de Frenet y métodos de ortogonalización. Posteriormente es ella quien resuelve, mediante el cálculo numérico, el principal problema planteado: pasar de una trayectoria elíptica a una parabólica. "*No se trata de una solución teórica, sino numérica*", proponiendo el método de Euler para afrontar el problema. Este método es el más simple de los denominados de Runge-Kutta para resolver un Problema de Valor Inicial.

Problema de Valor Inicial

Sean D un dominio de $\mathbb{R}^{n+1}$ (conjunto abierto y conexo), una función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, un instante inicial $t_0 \in \mathbb{R}$, y un valor inicial $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $(t_0, \xi_0) \in \overline{D}$. Un **Problema de Valor Inicial, (P.V.I.),** consiste en encontrar una función diferenciable $x(\cdot) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ solución del problema:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \quad , \quad t \in I \\ x(t_0) = \xi_0 \end{cases}$$

Donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$ tal que $t_0 \in \overline{I}$ y $(t, x(t)) \in D$ para todo $t \in I$

Enunciamos ahora el mencionado Método de Euler:

Método de Euler

Dado

$$x'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

Tomando un paso h lo suficientemente pequeño tenemos:

$$x'(t) \approx \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

Por lo que aproximamos:

$$x'(t_i) = f(t_i, x(t_i)) \quad \Longrightarrow \quad \frac{x(t_{i+1} - x(t_i))}{h} \approx f(t_i, x(t_i))$$

Por último, tomando x_i como aproximación de $x(t_i)$ (que es la solución exacta del P.V.I. en el punto t_i), enunciamos el esquema numérico del Método de Euler:

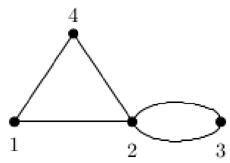
- PASO 1. $x_0 \approx \xi_0$.
- PASO 2. Para $i = 0, 1, ..., N-1$: $\quad x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i)$

Éste es uno de los primeros métodos estudiados en los cursos de Análisis Numérico. Como comentamos previamente, pertenece al grupo de métodos de Runge-Kutta que son métodos monopaso (se calcula la aproximación en el paso $i+1$). Sin embargo este método sólo alcanza orden de precisión 1. Otros métodos de Runge-Kutta como el del Trapecio o los Métodos de Taylor sí alcanzan órdenes de precisión superiores. También lo hacen los métodos multipaso (se calcula la aproximación hasta el paso $i+r$ para un método de r pasos) lineales, que además son más eficientes respecto al número de iteraciones necesarias para llegar a la solución [23]. El Análisis Numérico tiene un amplísimo abanico de aplicaciones, desde la Termodinámica, Mecánica de Sólidos y Fluidos, Física del Estado Sólido e Ingeniería de Materiales, Medicina, Biología, etc. [24].

La Optimización, al igual que el Análisis Numérico, trata numerosos problemas y sus aplicaciones son muy diversas, siendo el objetivo de estos problemas el encontrar un valor extremo (máximo o mínimo) de una función. Existen varias ramas dentro de este campo como la Programación Lineal, Programación No Lineal, Teoría de Grafos y Redes, Heurística, etc.

Vamos a analizar el problema de Teoría de Grafos en la película «El indomable Will Hunting» que mencionamos en la sección 2.3. Veamos el enunciado:

Sea el grafo:



Encontrar:

1. *La matriz adyacente A.*
2. *La matriz que da el número de trayectorias de longitud 3.*
3. *La función que genera las trayectorias $i \longmapsto j$.*
4. *La función que genera las trayectorias $1 \longmapsto 3$.*

Podemos ver este enunciado en la figura 11. Observamos que es un sencillo problema de Teoría de Grafos que cualquier alumno graduado en matemáticas podría resolver. Nuestro objetivo no es resolver este problema, pero sí introducir los conceptos básicos que se mencionan.

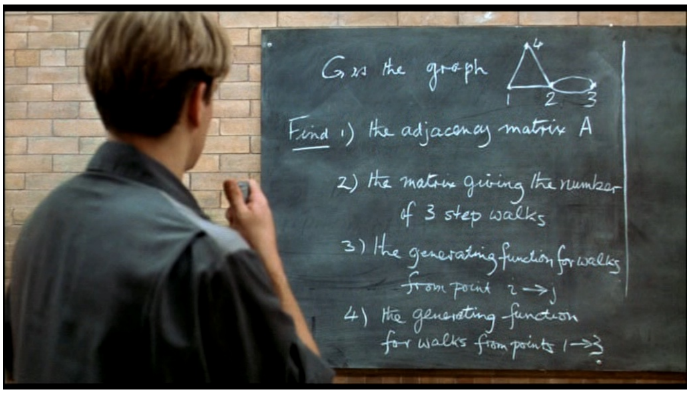


Figura 11: Fotograma de «El indomable Will Hunting» en el que observamos el problema de grafos planteado.

Un **grafo** no dirigido o, simplemente, grafo es un par $G = (V, E)$, donde V es un conjunto no vacío cuyos elementos se denominan vértices o nodos y $E \subset V \times V$ es un conjunto de pares no ordenados de vértices llamados aristas.

Sea $G = (V, E)$ un grafo tal que $V = \{1, ..., n\}$ con $n \in \mathbb{N}$, la **matriz de adyacencia**, $A = (a_{ij})$, de G se define por:

$$a_{ij} = \begin{cases} m(\{i,j\}) \quad , \quad si\{i,j\} \in E \\ 0 \quad , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Siendo $m(\{i,j\})$ la **multiplicidad** de la arista $\{i,j\}$, es decir, el número de veces que aparece en el grafo. Como ejemplo, vemos que la matriz de adyacencia que piden en el apartado 1. es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por último, la **función generatriz** de las trayectorias $i \longmapsto j$ viene dada por el elemento $f_{ij}(z)$ de:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A(z)^n \quad ; \quad A(z) = ((a_{ij}) \cdot z)$$

Éstos son algunos de los conceptos fundamentales de la Teoría de Grafos, cuyo origen podemos establecer en el problema de los Puentes de Königsberg resuelto por Leonhard Euler en 1763 [25]. De nuevo sus aplicaciones son muy variadas, como pueden ser el problema del viajante, problema de la ruta óptima o camino más corto, optimización de circuitos eléctricos, arquitectura de redes de comunicación, etc.

Vista la naturaleza de los problemas abordados por el Análisis Numérico y la Optimización no resulta raro observar que haya problemas que conciernan a ambas ramas. Tenemos como ejemplo el Método de Newton (o de Newton-Raphson), que aparece como ejemplo en una clase de Ecuaciones no Lineales en las primeras escenas de «21, Blackjack» (Robert Luketic, 2008). No se describe el método en detalle, aparte de la polémica sobre su autoría entre Isaac Newton y Joseph Raphson, [8].

Método de Newton

Es un método numérico para hallar los ceros de una función real, o los extremos de la misma hallando los ceros de su función derivada. Es un método abierto, es decir, su convergencia global depende de la elección del valor inicial. Su esquema numérico para la aproximación inicial ξ_0 y una tolerancia τ es el siguiente:

- PASO 1. $x_0 = \xi_0$.
- PASO 2. Hasta que $|x_{n+1} - x_n| \leq \tau$: $\quad x_{i+1} = x_i + \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

2.5. Probabilidad y Estadística

Históricamente datamos el origen del Cálculo de Probabilidades con la obra de Christiaan Huygens "De ratiociniis in ludo aleae" ("Sobre los razonamiento de los juegos de dados"), publicada en 1657 y basada en la correspondencia entre los matemáticos Blaise Pascal y Pierre de Fermat sobre este tema. Posteriormente los avances más importantes se producen de la mano de Jan de Witt al introducir el concepto de esperanza matemática; Jacques Bernouilli con su obra "Ars Conjectandi" ("El arte de la conjetura"), publicada de manera póstuma y que trata la Teoría de Permutaciones, muestra una demostración del Teorema Binomial y la Ley de los Grandes Números; otros matemáticos de renombre como Leonhard Euler, Pierre Laplace, Karl Gauss o Andrei Markov; y más adelante, en la segunda mitad del siglo XX, con la aparición de la Teoría de la Medida [2].

Por norma general el cine trata la Probabilidad de manera superflua, mencionando curiosidades sobre sus problemas y no la naturaleza de sus principales resultados. Además, es una de las ramas matemáticas donde más errores conceptuales se cometen, como por ejemplo con la noción de la media. En «El apartamento» (Billi Wilder, 1960) encontramos el siguiente diálogo:

-"*He estado leyendo una estadística sobre accidentes y enfermedades. El ciudadano neoyorkino entre los 20 y los 50 tiene dos resfriados y medio por año.*

+*¡Qué gran responsabilidad la mía!*

-*¿Por qué?*

+*Porque como yo no me resfrío, para que no fallen las estadísticas otro infeliz ha de tener cinco resfriados.*"

Lo mismo sucede en «El manantial de las colinas» (Claude Berri, 1986) en la que un personaje asegura que lloverá los días siguientes para que se *cumplan* las estadísticas de lluvia de los últimos años [4]. Una visión más acertada de la Falacia de Montecarlo -creencia de que un suceso aleatorio, como el lanzamiento de una moneda, depende de los sucesos pasados- se da en la película «Rosencrantz y Guildenstern han muerto» (Tom Stoppard, 1990). Éstos son dos personajes secundarios de "Hamlet" de Shakespeare, y principales en esta película. A lo largo de la película Guildenstern lanza una moneda al aire, que cae hasta 154 veces seguidas de cara. En un diálogo un tanto metafísico sobre este suceso, Guildestern comenta:

"*[...] O una espectacular reivindicación de principios, según la cual una moneda tirada al aire tiene tantas probabilidades de salir cara como cruz, por lo tanto no debe sorprendernos que así ocurra cada vez.*"

A lo que Rosencrantz contesta: "*Nunca he visto nada igual*". Ciertamente es un suceso poco probable, $\left(\frac{1}{2}\right)^{154} = 4,38 \cdot 10^{-47}$. Eso sí, esta probabilidad es a priori, es decir, antes del primer lanzamiento. La probabilidad de que el lanzamiento número 155 salga cara sigue siendo de $\frac{1}{2}$, [2].

Otro problema probabilístico clásico es la Paradoja de Monty Hall -o Problema de las Tres Puertas-. Basado en el concurso de la televisión estadounidense "Let's make a deal" -del cual Monty Hall era su presentador-, su descripción y solución aparece detallada en la ya mencionada «21, Blackjack». En la misma escena en la que se comenta la autoría del Método de Newton, y de una manera no muy conexa, el profesor pregunta por este problema cuya premisa es la siguiente:

Problema de Monty Hall

Un concursante debe elegir entre tres puertas, dos de las cuales esconden una cabra y la otra un coche. Obtendrá el premio que descubra su puerta elegida. El concursante escoge una puerta, tras lo cual el presentador abre una de las dos restantes, que esconde una cabra, y da la opción al concursante de cambiar de puerta o quedarse con la elegida. Veamos el argumento del protagonista para decidir cambiar de puerta:

"*Mi respuesta está basada en la estadística, en el cambio de variable. [...] Cuando dijo por primera vez que eligiera una puerta, tenía un* $33,3\,\%$ *de hacer la elección certera. Pero cuando se ha abierto una de las puertas y puedo volver a elegir, ya tengo un* $66,7\,\%$ *si elijo cambiar. Así que escojo la puerta número dos y gracias por ese* $33,3\,\%$ *más de ventaja.*

Matemáticamente, definimos los sucesos:

$$\begin{cases} A : \text{elección inicial de la puerta con el coche} \\ B : \text{elección inicial de una puerta con una cabra} \\ C : \text{el jugador gana el coche} \end{cases}$$

Tenemos $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ y queremos calcular $P(C)$. Basta notar que $\{A, B\}$ es un partición del espacio muestral Ω, es decir, $A \cap B = \varnothing$ y $A \cup B = \Omega$. Por tanto $C = (C \cap A) \cup (C \cap B)$. Calculamos:

$$P(C) = P((C \cap A) \cup (C \cap B)) = P(C \cap A) + P(C \cap B) = P(C|A)P(A) + P(C|B)P(B)$$

Una vez el presentador abre una puerta que esconde una cabra, al jugador le queda la opción de cambiar o no de puerta elegida y las probabilidades de ganar son las siguientes:

$$\begin{cases} \text{Cambio de puerta: } P(C|A) = 0\ ,\ P(C|B) = 1 \quad \Longrightarrow \quad P(C) = \dfrac{2}{3} \\ \text{Sin cambio de puerta: } P(C|A) = 1\ ,\ P(C|B) = 0 \quad \Longrightarrow \quad P(C) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Observamos por tanto que no se trata de un cambio de variable estadístico como expone el protagonista, sino un problema puramente probabilístico.

Pasando al campo de la Estadística, gracias a «La sombra de la traición» (Michael Brandt, 2011) podemos exponer el tema del Contraste de Hipótesis. Durante una investigación policial sobre una serie de asesinatos uno de los protagonistas plantea:

"*Lo único que tienes que hacer es establecer una hipótesis nula y tratar de demostrarla. Si no puedes demostrarla, es que tu hipótesis debe ser cierta. [...] De acuerdo, tomemos un hecho. Dices que crees que Cassius siempre vuelve al lugar del crimen, ¿verdad? Y tienes fotos de todos sus crímenes. Establece una hipótesis, por ejemplo, que Stephen Hawking es Cassius, lo que te da la hipótesis nula de que Stephen Hawking no es Cassius. Revisa las fotos y demuestra la hipótesis nula de que Supermán no es Cassius. Si lo consigues, querrá decir que tu hipótesis es incorrecta; si no lo consigues dependiendo del valor p, demuestras estadísticamente que tu hipótesis es cierta, o que Stephen Hawking es Cassius. Sí. Algunos no nos dormíamos en clase de Estadística en Harvard.*

Veamos los fundamentos del **Contraste de Hipótesis**:

Una **hipótesis estadística**, H, es una proposición sobre una característica de la población de estudio. La **hipótesis nula**, H_0, es la que deseamos contrastar, planteada en primer lugar y que se mantiene a no ser que los datos indiquen su falsedad; mientras que la **hipótesis alternativa**, H_1, es la negación de la hipótesis nula. Con esto, un **contraste de hipótesis** de H_0 frente a H_1 para cierto **nivel de significación**, α, consiste en elegir una **región crítica**, RC_α, del espacio muestral para el cual se rechaza la hipótesis nula si la muestra aleatoria pertenece a ella. De otra manera, consiste en establecer una partición del espacio muestral:

$$\Omega = RC_\alpha \cup RA_\alpha \quad ; \quad \varnothing = RC_\alpha \cap RA_\alpha$$

Siendo RA_α la **región de aceptación**. Por último, el **p-valor** es el nivel de significación más pequeño para el que la muestra aleatoria obtenida obliga a rechazar la hipótesis nula.

También podemos encontrar los conceptos de función generadora de momentos o el proceso de Poisson en la película española «Logaritmo Neperiano» (Abbé Nozal, 2011). A pesar de ser bastante desconocida y no de fácil acceso hay varias escenas con un sorprendente rigor matemático, aunque acaba con argumentos ficticios ya que el personaje principal intenta demostrar que es posible conocer los números premiados en un sorteo de *La primitiva*. Como prefacio de su *demostración* calcula la probabilidad de la combinación ganadora, que proviene de tomar 6 elementos de un conjunto de 49, es decir, el coeficiente binomial:

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = 13.983.861$$

Siendo la probabilidad de la combinación ganadora de una entre $\sim 14 \cdot 10^6$, la probabilidad de que dicha combinación contenga un número en particular es de $p = \frac{6}{49} \simeq 0,122$ y, por tanto, el pereiodo de retorno (definido como la inversa de la probabilidad) es de $p^{-1} \simeq 8,167$.

La demostración en sí comienza considerando el proceso de Poisson como la regla para la aparición de números en los sorteos. Recordemos que un **proceso de Poisson** de parámetro λt es un proceso de recuento asociado a una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $Exp(\lambda)$, esto es, para $\{X_n, n \in \mathbb{N}\} \sim Exp(\lambda)$ y $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ definimos el proceso de Poisson como [28]:

$$N(t) = máx\{n : S_n \leq t\}$$

cuya función de masa y función generadora de momentos son respectivamente:

$$P(N(t) = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad ; \quad M_X(z) = e^{\lambda t(e^z - 1)}$$

NOTA*: la función generadora de momentos también se suele denotar como $\phi_X(z)$ pero la denotamos así porque así lo hacen en «Logaritmo Neperiano»*

También cabe recordar que la función generadora de momentos se define, siempre que la esperanza matemática exista, como $M_X(z) = E(e^{zX})$, y se llama así ya que su $n-$ésima derivada evaluada en $z = 0$ genera el $n-$ésimo momento de la distribución:

$$\frac{d^n M_X(z)}{dz^n}|_{z=0} = E[X^n]$$

El protagonista calcula entonces los momentos para $n = 1$ y $n = 2$, aunque comete un error en el segundo ya que obtiene que ambos son iguales a λt. Realizando los cálculos se comprueba que

$$\frac{\partial^2 M_X(z)}{\partial z^2}|_{z=0} = \lambda t + \lambda^2 t^2$$

Salvando este error, sigue con su razonamiento tomando logaritmos a partir de la fórmula de Stirling para estabilizar la varianza. La estabilización de varianza es un método paramétrico de transformación de datos, especialmente aplicado en estudios estadísticos de ciencias aplicadas, para garantizar la normalidad de la muestras y la homogeneidad de las varianzas [29], [30]. Por su lado, la fórmula de Stirling es una herramienta de aproximación de grandes números:

$$ln(x!) \approx x\ ln(x) - x$$

Y por último, introduce una integral en un espacio 6-dimensional (por aquello que son 6 los números premiados) de donde obtiene la combinación ganadora del siguiente sorteo. Claramente este último paso carece de fundamento y no está argumentado en ninguno de los pasos anteriores de la demostración. Como ya comentamos, no es matemáticamente posible tal demostración por las leyes de la probabilidad; sin embargo, son de gran valor los primeros pasos que hemos ido detallando e introducen conceptos matemáticos poco frecuentes en el cine. No en vano, el director de la pelicula fue asesorado por el profesor del departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Valladolid Roberto San Martín Fernández [27].

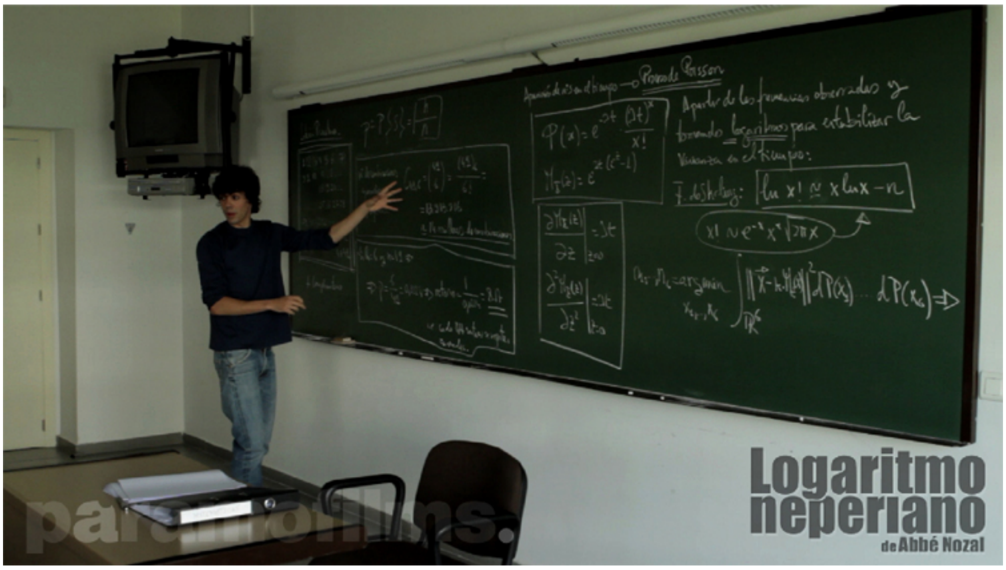


Figura 12: Fotograma de «Logaritmo Neperiano» en el que observamos la demostración planteada por el protagonista.

Por último debemos mencionar la película «Moneyball» (Bennett Miller, 2011) basada en hechos reales y, aunque no desarrolla conceptos estadísticos *per se*, muestra la importancia de esta rama matemática. Narra la historia del entrenador del equipo americano de béisbol Athletics de Oakland, Billy Beane, el primero en aplicar el método de la Sabermetría (del inglés *sabermetrics* por la Sociedad para la Investigación del Béisbol Americano, SABR) que básicamente es la aplicación del análisis probabilístico y estadístico en dicho deporte con el objetivo de formar un equipo competente. Este método se sigue aplicando hoy en día y en otros tantos deportes, aunque tiene especial calado en el béisbol debido a sus particularidades, ya que cada jugador cumple una función muy específica frente a la versatilidad en otros deportes [4] [8].

3. Matemáticos ilustres

En esta sección trataremos películas biográficas de matemáticos ilustres, con mayor o menor grado de exposición de sus aportaciones a las Matemáticas. Aunque en muchas ocasiones el cine peca de presentar a los matemáticos, ya sean personajes reales o ficticios, con personalidades extravagantes o incluso trastornos mentales, también estas películas son interesantes para la divulgación y el acercamiento a la sociedad del trabajo de los matemáticos. Veamos varios matemáticos ilustres, por orden cronológico:

Omar Khayyam. 1048 - 1131

Los escasos datos bibliográficos que conocemos de Ommar Khayyam se plasman en las películas «Omar Khayyam» (William Dieterle, 1957) y «El guardián: la leyenda de Omar Khayyam» (Kayvan Mashayekh, 2005), y en esta última se muestran también algunas de sus aportaciones científicas. Khayyam fue un matemático y astrónomo persa, principalmente conocido por el desarrollo de unas tablas astronómicas y el calendario yalalí, aún en uso y con menor error que el gregoriano. Lo que sabemos de sus aportes matemáticos es gracias a su obra "*Sobre Álgebra*" y los comentarios sobre los "*Elementos*" de Euclides. Estudia la resolución de ecuaciones cúbicas con los mismos procedimientos que ya aplicara Arquímedes, la intersección de cónicas; así como los números irracionales y el Quinto Postulado de la obra de Euclides. En las películas mencionadas encontramos escenas con comentarios a estos estudios aunque sin entrar en gran detalle como sí podemos ver en otros matemáticos que desarrollamos a continuación.

Srinivasa Aiyangar Ramanujan. 1887 - 1920

Matemático indio con una peculiar trayectoria, cuya vida y aportaciones podemos encontrar en dos películas recientes: «Ramanujan» (Gnana Rajasekaran, 2014) y «El hombre que conocía el infinito» (Matt Brown, 2015), aunque la primera sólo ha sido estrenada en la India. Ramanujan fue autodidacta, y no cursó estudios matemáticos formales hasta su estancia en el Trinity College de la Universidad de Cambridge, cuando ya había desarrollado avanzados teoremas en distintos campos. Sus resultados abarcan principalmente el Análisis, la Teoría de Números y las Fracciones Continuas.

Ramanujan llamó la atención del matemático británico Godfrey H. Hardy gracias a una carta en la que afirma conocer la fórmula para calcular la cantidad de números primos menores que uno dado. Además incluyó varios de sus resultados descubiertos como series infinitas que aproximaban el número π, entre ellos una ya expuesta por Bauer:

$$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3-13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3+...=\frac{2}{\pi}$$

Dicha carta hizo que Ramanujan realizase una estancia de cinco años en Cambridge colaborando con el profesor Hardy. En «El hombre que conocía el infinito» vemos algunos de los resultados que desarrollaron conjuntamente, y se hace hincapié en la importancia de las demostraciones en Matemáticas, puesto que Ramanujan era capaz de desarrollar resultados por "*inspiración divina*" mientras que Hardy le requería dichas demostraciones de cara a publicar los resultados.

Parte de sus estudios los centraron en la **función de partición**. En Teoría de Números, una **partición** de un número natural $n \in \mathbb{N}$ es una descomposición del mismo como suma de números naturales, mientras que la función de partición de n determina el número de particiones existentes para dicho natural. Ramanujan y Hardy hallaron una serie asintótica no convergente para calcular de manera exacta esta función (no vamos a entrar en la aproximación asintótica, teoría de la que podemos econtrar numerosa bibliografía como en [26]). Obviaremos la expresión de dicha serie dada su complejidad.

Otra curiosidad relatada en la película es la anécdota que protagonizaron ambos matemáticos en relación al número 1729. Este es el primer número (entendido como el menor entero) de los hoy conocidos por Números de Hardy-Ramanujan, que son aquellos que se pueden expresar como suma de dos cubos de dos maneras diferentes: $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$. Esta anécdota surgió a partir de una matrícula de un taxi, lo que ha dado lugar a los Números Taxicab, $Ta(n)$, que son los menores enteros que se pueden expresar como suma de dos cubos de n maneras distintas. Claramente los Números Taxicab son la generalización de los Números de Hardy-Ramanujan, siendo el menor de estos últimos, el $Ta(2)$.

Aunque la estancia de Ramanujan en el Trinity College fue corta, la cantidad de resultados descubiertos fue grande. Gran parte de ellos se encuentran en una serie de famosos cuadernos expuestos en el Trinity College y que han inspirado numerosos estudios matemáticos.

Alan Mathison Turing. 1912 - 1954

De nuevo son varias las películas que relatan la vida del matemático británico Alan Turing: «Breaking the Code» (Herbert Wise, 1996), «Enigma» (Michael Apted, 2001) y «Descifrando Enigma» (Morten Tyldum, 2014), siendo la primera y la última las de mayor valor bibliográfico y matemático. No exponen los conceptos matemáticos del trabajo de Turing del mismo modo que las películas mencionadas en la sección 2, pero recalcan la importancia que tuvo su labor matemática y criptográfica en el desenlace de la Segunda Guerra Mundial (1939 - 19459).

Ambas películas tratan también los trabajos de Turing tras la Guerra, desarrollando las primeras computadoras programables, formalizando el concepto de algoritmo y concibiendo el conocido "Test de Turing". Sobre sus trabajos matemáticos, encontramos una buena exposición del "*Entscheidungsproblem*", o problema de la decisión / decibilidad. Este problema de lógica consisten en encontrar un algoritmo que decida si cualquier fórmula es un teorema (entendiendo estos conceptos como los define la lógica simbólica).

John Forbes Nash. 1928 - 2015

La vida de este matemático estadounidense se narra, con ciertas licencias, en una de las películas más conocidas al hablar de matemáticas en el cine: «Una mente maravillosa» (Ron Howard, 2001). Aunque trata en mayor grado su enfermedad mental, también se menciona su trabajo en la Teoría de Juegos No Cooperativos. Una de sus grandes aportaciones fue concepto de Equilibrio de Nash. La película relata la motivación de su idea estando Nash con varios compañeros en un bar discutiendo sobre la estrategia para conquistar a la mujer más atractiva de un grupo de amigas.

De nuevo encontramos un gran valor divulgativo, ya que se destaca el importante papel de las matemáticas para la toma de decisiones concernientes a grandes momentos históricos, en este caso la Guerra Fría. Nash colabora en varias tareas criptográficas con el gobierno de Estados Unidos y, aunque la película no muestra los detalles matemáticos de dichas colaboraciones, se hace entender que sus resultados dirigirán las estrategias militares en el conflicto bélico.

4. Conclusiones

Hemos podido comprobar a lo largo del trabajo que son numerosos los conceptos matemáticos que se encuentran en el cine. Abarcan prácticamente todas las ramas y desde los temas más elementales a los más profundos, siendo la rigurosidad y el detalle la mayor variable según cada caso. La mejor manera de establecer unas conclusiones claras es, sin duda, responder a las preguntas que planteamos en la introducción -sección 1-.

¿Existen en el cine suficientes referencias matemáticas como para considerarlo una herramienta útil en la docencia y la divulgación?

Podemos claramente afirmar que sí existen numerosas referencias matemáticas dentro del cine. Obviamente no cualquier concepto matemático se explica en el cine, ni teorías completas desarrolladas del mismo modo que se exponen en la docencia escolar o universitaria. A lo largo de este trabajo hemos visto desde conceptos de los Elementos de Euclides hasta resultados de Álgebra Homológica correspondientes a estudios de postgrado de matemáticas avanzadas. Además, aunque con mayor o menor frecuencia, encontramos conceptos de prácticamente todas las ramas matemáticas. Aquí hemos expuesto las que hemos considerado las principales acorde a los estudios del grado, pero existen otras tantas referencias en ramas como la teoría de números, topología, etc.

¿Cómo aborda el cine las matemáticas?

En primer lugar, como ya hemos comentado en el cine no se exponen los conceptos del mismo modo que una clase de matemáticas. Es claro que ese no es el objetivo del cine. Que esto no sea así no quiere decir que las explicaciones no sean rigurosas o completas. Podemos poner como ejemplos la demostración de la proposición 47 de los Elementos en la película «El hombre sin rostro» (sección 2.1), el ejercicio de curvas mecánicas en «Muerte de un ciclista» (sección 2.1) o el cálculo del área encerrada por una elipse en «Academia Rushmore» (sección 2.3) entre otros muchos.

De cara a la docencia o divulgación a través del cine, podemos distinguir dos tipos de películas: las que mencionan algún concepto matemático como tema tangencial a la película y las que las matemáticas forman parte importante del núcleo de la película, bien porque el tema principal sean las matemáticas, haya algún personaje matemático o científico, etc. La gran diferencia es que en este segundo grupo las explicaciones y fundamentaciones de los temas comentados suelen ser más rigurosos para darle mayor consistencia a la película. Como ejemplo curioso podríamos mencionar «Una mente maravillosa», que podríamos pensar que cae dentro del segundo grupo al ser el protagonista principal uno de los matemáticos más importantes del siglo XX. Sin embargo el tema central de la película son las enfermedades mentales más que las matemáticas. De ahí que no haya tanto empeño en difundir claramente la matemática como puede ocurrir en «El hombre que conocía el infinito».

¿Es todo matemáticas?

Este es uno de los puntos con mayor controversia, pues fuera de la comunidad matemática no siempre quedan claros los límites de las mismas. Tampoco hemos definido estos límites a lo largo de este trabajo, pues el objetivo era mostrar ejemplos de verdadera matemática dentro del cine. Sin embargo no es difícil encontrar ejemplos, y como ya comentamos en la introducción -sección 1- suelen abordar la numerología como en «Pi, fé en el caos» o «El aviso». Una vez más, queda demostrado que sí existen referencias de verdaderas matemáticas en el cine, y en todo caso queda a juicio del docente el poder marcar las diferencias.

¿Son correctas estas matemáticas?

De nuevo es otro punto que no hemos tratado a fondo en este trabajo, pero existen numerosos errores y gazapos matemáticos en el cine. Tan numerosos que podemos encontrar artículos únicamente dedicado a estos errores, como "Gazapos matemáticos en el cine y en la televisión" del profesor J.M. Sorando [13], autor de varios libros divulgativos de matemáticas. Queda también a juicio del docente el exponer estos errores.

Referencias

[1] Martín, A. y Martín Sierra, M. (2012). Mathsmovies: La web de las matemáticas y el cine. http://aulamatematica.com/mathsmovies/

[2] Población Sáez, A. J. Las matemáticas en el cine. Proyecto Sur de Ediciones S. L. Real Sociedad Matemática Española, 2006.

[3] Población Sáez, A. J. Cine y matemáticas. Blog Divulgamat de la Real Sociedad Matemática Española. http://www.divulgamat.net

[4] Sorando Muzás, J. M. Revista SUMA de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
http://revistasuma.es

[5] Thibaut Tadeo, Elena. "Pi, fé en el caos. Una experiencia educativa". Entrada del blog Divulgamat, Enero 2005.

[6] Beltrán Teciller, Pablo. "Series y largometrajes como recurso didáctico en matemáticas en educación secundaria". Tesis doctoral, 2015, Facultad de Educación de la UNED.

[7] Petit Pérez, M. F. Solbes Matarredona, J. "La ciencia ficción y la enseñanza de las ciencias". Enseñanza de las Ciencias, Revista de investigación y experiencias didácticas, 2012.

[8] Cabrera Gómez, Gloria. "Las matemáticas en el cine". Cuadernos de trabajo de la Facultad de Estudios Estadísticos de la UCM, 2018.

[9] Belinchón, Gregorio. "Las matemáticas no mienten". Diario el País, 26/03/2018.

[10] Medina, Marta. "¿Pueden las matemáticas ser culpables de asesinato". Diario el Confidencial, 23/03/2018.

[11] Población Sáez, A. J. "El aviso. Matemáticas, ¿dónde?". Entrada 130 del blog divulgamat, 05/11/2018.

[12] Sorando Muzás, J. M. "A vueltas con π ". Entrega 75 de la revista SUMA, pp. 85 - 92, marzo 2014.

[13] Sorando Muzás, J. M. "Gazapos matemáticos en el cine y en la televisión". Entrega 55 de la revista SUMA, pp. 117 - 125, junio 2007.

[14] Sols Lucía, Ignacio. Apuntes de la asignatura "Historia de las Matemáticas"

[15] Sorando Muzás, J. M. "El primer Axioma de Euclídes". Blog "Matemáticas en el cine y en las series de t.v."
http://matematicasentumundo.es/CINE/cine_Axioma_Euclides.htm

[16] Sorando Muzás, J. M. Blog "Matemáticas en el cine y en las series de t.v."
http://matematicasentumundo.es/CINE/cine.htm

[17] Población Sáez, A. J. "Algunos momentos matemáticos del cine". "MATerials MATemàtics"Publicación electrónica de divulgación del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona. Volumen 2008, Trabajo nº 2, 21 pp.

[18] Arrondo Esteban, Enrique. "Apuntes de Estructuras Algebraicas" de la asignatura del Grado de Matemáticas de la UCM.

[19] Emmer, M. "Mathematics, Art, Technology and Cinema". Springer - Verlar, 2003.

[20] González - Prieto, A. "Lema de la serpiente"
http://www.mat.ucm.es/~joseag12/investigacion/documentos/snakeLemma.pdf

[21] Gutiérrez Muñoz, Héctor. "Introducción al Álgebra Homológica". Universidad de la Rioja, 2017.

[22] Azagra Rueda, Daniel. Apuntes de la asignatura "Cálculo Integral" del Catedrático de Análisis Matemático de la U.C.M.

[23] Ramos del Olmo, Ángel Manuel. Apuntes de la asignatura "Análisis Numérico" del grado de Matemáticas de la U.C.M.

[24] Laín Beatove, Santiago. "Métodos Numéricos y sus Aplicaciones en Diferentes Áreas". Universidad Autónoma de Occidente, 2013.

[25] Nuñez Valdés, J., Alfonso Pérez, M., Bueno Guillén, S., Diánez del Valle, M.R. y de Elías Olivenza, M.C. "Siete puentes, un camino: Königsberg". Revista SUMA, Febrero 2004, pp. 69 - 78.

[26] Álvarez, Josefina. "Hablemos de Series Divergentes". MATerials MATemàticsVolum 2014, treball no. 5, 37 pp.
http://mat.uab.cat/matmat/PDFv2014/v2014n05.pdf.

[27] Población Sáez, A. J. "Cine Palentino". Entrada 58 del blog divulgamat, 10/03/2011.

[28] Rodríguez, Mª Teresa. Apuntes de la asignatura "Procesos estocásticos y simulación" del grado de Matemáticas de la U.C.M.

[29] Osada, Jorge; Rojas, José Luis; Vidal, Lupe. "Distribución Normal ¿Es tan frecuente como parece?". Rev Med Chile 2012; 140: 548.

[30] de Calzadilla, Josefina; Guerra, Walkiria; Torres, Verena. "El uso y abuso de transformaciones matemáticas. Aplicaciones en modelos de análisis de varianza". Revista Cubana de Ciencia Agrícola, Tomo 36, No. 2, 2002.

Agradecimiento

Me gustaría agradecer a mi familia por el apoyo mostrado durante estos años de la carrera. Y a mi tutora del TFG, Gloria, no sólo por su ayuda y el material bibliográfico aportado para el desarrollo de este trabajo, sino también por la gran labor divulgativa que realiza año tras año, enseñando las matemáticas y acercándolas a estudiantes de todas las edades desde un punto de vista novedoso y divertido: el cine.